

Компютърната програма “Откривател” и компютърно-генерираната енциклопедия по евклидова геометрия

Sava Grozdev, Deko Dekov

Submitted on 30 October 2013

Publication Date: 30 January 2014

Резюме. Компютърната програма “Откривател” е първата в света компютърна програма, предназначена да даде възможност на учениците и студентите лесно да правят научни открития. Компютърната програма трябва да бъде разглеждана като средство за активизиране на интереса на учениците и студентите към математиката и информатиката. Компютърната програма може да бъде използвана от учениците и студентите при подготовка на реферати, дипломни работи, статии за училищни или научни списания, при работа в кръжок по математика и при подготовка за състезания по математика, а също така за решаване на определени задачи от учебния материал по синтетична и аналитична геометрия. В тази статия авторите представят компютърната програма “Откривател” и енциклопедията по евклидова геометрия, която е в процес на създаване с помощта на тази компютърна програма.

Keywords: computer-generated mathematics, Euclidean geometry, Discoverer, mathematical olympiad.

Компютърната програма “Откривател” е проектирана да открива нови научни резултати в областта на евклидовата геометрия. Компютърната програма “Откривател” е създадена от авторите на тази статия, като работата по производството на компютърната програма започна през юни 2012 г. Преди това, през 2006 г. беше създаден прототип на компютърната програма, който произведе няколко хиляди нови теореми. През октомври 2013 г. започна и работата по създаването на енциклопедия по евклидова геометрия, съдържаща теореми, които са открити от “Откривател”. Преди това, през 2006 г. беше създаден прототип на енциклопедията. Компютърната програма е в процес на разработка, но може вече да бъде използвана за някои задачи. Очаква се работата по разширение на сегашния вариант на компютърната програма да продължи още две, може би три години.

Тази статия допълва предишни статии на авторите за компютърната програма “Откривател”. Тази статия и статиите (Гроздев & Деков, 2013a-g), (Grozdev & Dekov, 2014a) могат да бъдат разглеждани като встъпителни статии за запознанство с компютърната програма “Откривател”.

Насърчаването на интереса на учениците и студентите към математиката е важен аспект в образованието. Отлична форма за стимулирането на интереса е

писането на реферати. При писането на реферат учениците и студентите се запознават по-подробно с дадена тема и се стремят да я видят от своя гледна точка. Всеки добре подготвен реферат е паметен за учениците и студентите, и в много случаи оказва влияние за по-нататъшното ориентиране на учениците и студентите към определени насоки в науката и образованието. Дипломната работа на студентите е разширен реферат, като методологията за писане на реферати трябва да бъде предварително добре усвоена от студента. Студентите от учителски специалности трябва добре да усвоят методологията на писане на реферати. Друга форма за насърчаване на творческите способности на учениците, са ученическите състезания, при които учениците представят реферати, като например националния конкурс “Млади таланти” и т.н. Пример на добре написан реферат за конкурса “Млади таланти” е например рефератът “Аполониеви задачи” с автор Радко Котев, написан под ръководството на Христо Христов, учител в Националната природо-математическа гимназия в София, виж (Котев). Подобни състезания трябва да бъдат организирани всяка година във всяко училище и град и на национално ниво и да обхващат широк кръг ученици. Рефератите, подготвени от учениците трябва да бъдат публикувани в Интернет, като всяко училище би трябвало да създаде свое уеб базирано списание, в което са се публикуват реферати и други достижения на учениците. Това не изисква пари, а само инициативност. В много случаи самите ученици биха могли да създадат такова училищно списание. Списанието ще даде ясна картина за това доколко в училището се насърчава творческото мислене на учениците. Всяко висше училище също би трябвало да създаде такова интернет-списание за реферати на студентите.

При писането на реферат се предполага, че ученикът или студентът ще преразкаже определена тема. Може да се очаква, че интересът на учениците и студентите ще се повиши, ако те имат възможност не само да изложат известните факти, но и да прибавят нови, неизвестни досега. Казано с други думи, рефератът може да прерастне в научна статия с оригинални научни резултати. Компютърната програма “Откривател”, заедно с комплект от помощни средства, открива магистрален път към бързо разширяване на известното знание в областта на евклидовата геометрия. Авторите се надяват, че ако бъде добре организирана работата по използването на тази компютърна програма, в евклидовата геометрия ще може да бъде осъществен значим български принос. Една немалка част от този принос ще могат да внесат и ученици и студенти. За бързото и относително лесно разработване на теми в областта на евклидовата геометрия и тяхното изложение във вид на научни статии, авторите разработват специална методология. Добре би било един ученик, когато кандидатства за един университет, или един студент, когато кандидатства за магистърска или докторска програма, да представи и научни публикации, които отразяват научните му достижения.

Компютърната програма “Откривател” е написана с помощта на езика за програмиране PHP и базата данни MySQL. Тези софтуерни инструменти са безплатни и широко популярни. За студенти по информатика, а и за някои ученици, интерес биха могли да представляват някои алгоритми, заложиени в компютърната програма “Откривател”. Обстоятелството, че компютърната програма е написана на PHP прави кода на тази компютърна програма лесно разбираем. Овладяването на езиците за програмиране JavaScript и PHP би трябвало да бъде задължително за студенти от учителски специалности по

математика и информатика. Тези два езика за програмиране, допълнени с HTML и CSS, съставляват основата на функционирането на уеб сайтовете в днешно време. Умението за изготвяне на уеб сайтове, известно като “уеб дизайн”, е от важно значение в днешно време. Уеб дизайнът, като учебна дисциплина, би трябвало да бъде включен в учебните програми както на средното, така и на висшето училище. Всеки ученик или студент би трябвало да бъде в състояние да изготви например един прост личен уеб сайт, а учениците и студентите би трябвало да участват в процеса на разширяване и подобряване на уеб сайта на своето училище или университет. Уеб дизайнът би могъл да бъде използван и за редица важни задачи. Ако ученик или студент (същото важи и за професионалист) иска да създаде електронен магазин, предпочитаните инструменти са PHP и MySQL. Ако искаме да подпомогнем училищната библиотека, като изготвим софтуер за записване и отписване на заетите за прочит книги, комплектът PHP и MySQL е добрият избор. Ако искаме да направим здравна карта на всеки ученик (или на всеки български гражданин), така че здравната карта да бъде достъпна посредством интернет със система от пароли на различни нива, и да има пълна функционалност, PHP и MySQL са добрият избор. С малко повече работа, здравната карта би могла и да дава съвети на потребителя за здравословното му състояние, евентуално за методите за лечение и препоръчителните лекарства. Що се касае до образованието по различните учебни дисциплини, има много задачи, които учениците и студентите биха могли да решат с помощта на PHP и MySQL. Тук ще пропуснем примерите. Що се касае до използването на базата данни MySQL в учебния процес, използването на тази база данни е силно препоръчително. Използването на MySQL ще даде възможност на учениците да усвоят универсалния език за управление на релационни бази данни SQL. Този лесен и забавен език ще приближи образованието до нуждите на живота.

Изкуствен интелект по Нилсон

“В по-голямата част от системите за изкуствен интелект се наблюдава повече или по-малко постоянно разделяне на стандартните изчислителни компоненти: данни, операции и управление... Нашата гледна точка се заключава в това, че една система, която допуска отделяне на база данни, операции и управляващи компоненти, представлява подходящ метафоричен строителен блок за съставяне на ясно описание на системите за изкуствен интелект”.

Нилсон, Принципи на изкуствения интелект, стр.25

В тази статия не влиза задачата да бъде направен обзор на изследванията в областта на изкуствения интелект, посветени на откриването на нови теореми от компютъра. Това е задача на отделно изследване, което може би любознателният читател ще направи. Тук можем да отбележим следното.

През 1958 г. Simon и Newell изказаха своето известно предсказание, “Within ten years a digital computer will discover and prove an important mathematical theorem.” – “До десет години компютър ще открие и докаже важна математическа теорема” (Simon and Newell, 1958). Понастоящем обаче има само малък брой анонси на теореми, открити от компютър и засега няма работеща компютърна програма, която прави научни открития (освен “Откривател”). На авторите не е известен и анонс на компютърна програма, която да

удовлетворява изискванията за открития на теореми от предсказанието на Simon и Newell. Ако отчетем възможностите на “Откривател”, изразяващи се в лесното производство на хиляди (на практика милиони) нови теореми, някои от които могат да бъдат сметнати за значими в рамките на евклидовата геометрия, както и възможността за разработване на цели теми, която за първи път е ансирана от “Откривател”, може би ще може да се каже, че “Откривател” е първата в света компютърна програма, която е изпълнила изискванията на предсказанието на Simon и Newell.

Тук ще изложим принципите на функциониране на компютърната програма “Откривател”. Запознанството с този раздел е полезно за тези, които се интересуват от принципите на функциониране на системите за изкуствен интелект.

Компютърната програма “Откривател” е изградена, като са ползвани принципите за изграждане на система за изкуствен интелект, така както са изложени в учебника на Нилсон “Принципи на изкуствения интелект” виж (Нилсон, 1985). След публикуването на този учебник през 1980 г. (превод на руски език е публикуван през 1985 г.), изложението на Нилсон е основа на курсовете по изкуствен интелект в много университети. В тази статия ще цитираме учебника на Нилсон съгласно руското издание от 1985 г. Ако читателят желае да разбере концепцията на Нилсон за програма за изкуствен интелект, добре би било да прочете част от първа глава на книгата, по-точно, първите страници на първа глава, стр. 25-26, и стр. 41-48, които са параграф 1.2.2. “Разложими системи от продукции”.

Компютърната програма “Откривател” има три ясно разграничени части – база данни, продукционни правила и система за управление. Промени в модулите на всяка от тези части могат да бъдат правени относително независимо. В терминологията на Нилсон, компютърната програма “Откривател” е некомутиативна разложима система за изкуствен интелект.

В посочения по-горе параграф 1.2.2 от книгата на Нилсон, са дадени три примера на разложими системи за изкуствен интелект. Първият пример е даден на стр.41 и е част от учебния материал по изкуствен интелект в някои университети. Останалите два примера описват реални системи за изкуствен интелект – система за генериране на химически структури и система за пресмятане на неопределени интегрални. Компютърната система “Откривател” би могла да служи като още един пример на реална разложима система, а именно, пример на система за изкуствен интелект за откриване на нови теореми.

Тук ще отворим една скоба за задачата за компютърно пресмятане на неопределени интегрални. Компютърни програми за решаване на тази задача има създадени и добре функциониращи, но доколкото на авторите е известно, всички те са създадени в други държави. Не е ли време да започне и в България създаването на полезни образователни компютърни програми? В книгата си Нилсон показва как може относително лесно да бъде създадена добра компютърна програма за пресмятане на неопределени интегрални. Същите идеи са приложими и към редица други задачи – опростяване на алгебрични и тригонометрични изрази, решаване на уравнения и неравенства, пресмятане на производни, решаване на екстремални задачи и т.н. Създаването на образователни компютърни програми би трябвало да стане учебен предмет за студентите от учителските специалности. Добра идея е всяка година да бъдат

организиран национални състезания за ученици и студенти за най-добра компютърна програма, например за най-добра компютърна програма за пресмятане на неопределени интеграли. Едно такова състезание би стимулирало творческите способности на студенти и ученици и би повишил нивото на средното и висшето образование.

Концепциите на “Откривател” са универсални и биха могли да бъдат приложени към откриване на ново знание в различни области, като физика, химия, биотехнологии. Особено важно е разработването на генетични програми за производство на изкуствени биологични обекти. Тези биологични обекти биха могли да вършат полезна работа – да произвеждат горива и лекарства, да преработват отпадъци в полезни продукти и т.н. Трябва да се отбележи, че компютърното симулиране на генетични структури така или иначе е задължително, предвид на сложността на генетичните структури. Приносът на “Откривател” би могъл да се изрази в това, че компютърната програма ще открие генетични структури, които няма как да бъдат открити от други класове компютърни програми. Работата в тази насока е перспективна и колкото по-рано започне, толкова по-добре. Това е тема с практическа приложимост и има потенциала да подпомогне българската икономика.

Съгласно концепцията на Нилсон, една система за изкуствен интелект има база данни. В “Откривател” данните се записват като редове в таблица на базата данни MySQL. Базата данни MySQL е реляционна база данни. Управлението се извършва с езика за управление на реляционни бази данни SQL, който е прост и лесен за използване. Безплатната добре функционираща компютърна програма HeidiSQL за Windows е интерфейс за лесно управление на базите данни на MySQL. С безплатната компютърна програма wamp (Windows, Apache, MySQL, PHP) можем да инсталираме на персоналния компютър с Windows целия софтуер, който ни е необходим, в една директория на Windows, която по подразбиране е именувана wamp. С това сме готови за работа. Ако искаме да ползваме “Откривател”, трябва да копираме програмата в поддиректория на wamp, която по подразбиране е именувана www. Инсталирането на wamp на персоналния компютър има това удобство, че сме независими от интернет. Обстоятелството, че файловете са на твърдия диск на персоналния компютър, ни позволява лесното им манипулиране, ако се наложи. Например, базите данни на MySQL са в папки и ако искаме една таблица от една база данни да стане таблица и на друга база данни, можем просто да поставим копие на таблицата в папката на съответната база данни. Друг вариант е да ползваме хостинг в интернет, където да разположим компютърната програма. Потребителят ще ползва “Откривател” като веб-базирано приложение, тоест, с браузър, посредством интернет. Всъщност, както знаем, в последно време PHP и MySQL са основните инструменти за създаване на веб-базирани приложения.

В съответствие с Нилсон, ние можем да говорим за една база данни за цялата система за изкуствен интелект. Това е доста условно, тъй като можем да ползваме няколко бази данни като считаме че таблиците на тези бази данни формират една обща база данни, тъй като можем да местим таблиците от една база данни в друга.

Базата данни на “Откривател” е разложима, тоест, може да бъде разглеждана като съставена от относително независими обекти. Обектите на

базата данни на “Откривател” са геометрични обекти от равнинната евклидова геометрия. Желателно е разширение на базата данни и с обекти на пространствената евклидова геометрия, което може да бъде направено на по-късен етап. Интерес представляват и неевклидовите геометрии. Обектите са от няколко вида – точки, триъгълници, окръжности, прави, триади от окръжности, отсечки, ъгли и т.н. Прибавени са и обекти, които не спадат към класическата евклидова геометрия, като криви от втора и трета степен. Това е направено, тъй като тези обекти са геометрични места на точки на обекти на класическата евклидова геометрия и следователно спомагат за изучаването на обектите на класическата евклидова геометрия. Същевременно, компютърната програма става приложима и при образованието по аналитична геометрия.

На този етап базата данни на “Откривател” не включва точки и прави в безкрайността, тъй като се предполагаше, че потребителите ще бъдат ученици и студенти от приложни специалности. За провеждане на по-задълбочени научни изследвания обаче обектите в безкрайността са необходими и ще бъдат добавени.

Както казахме, обектите на “Откривател” са редове в таблици на MySQL. Обектите от различен вид се разполагат в таблици от различен вид. Една таблица може да служи за таблица, в която са поместени обекти-точки, друга таблица – обекти-триъгълници и т.н. Можем да разполагаме обекти от един и същ вид не само в една, а в няколко таблици, служещи за различни цели, като можем да създаваме и нови таблици. Можем да разположим екземпляри от един обект в няколко таблици, ако това е необходимо.

Обектите на базата данни на “Откривател” могат да бъдат представяни и като елементи на масиви. В някои случаи обработката на масивите е по-удобна. Преобразуването на представянето на таблица на база данни в масив и обратно, е безпроблемно.

Всеки обект на “Откривател” има три съставни части – име, описание и допълнителни данни. Както е известно, една база данни със забележителни точки на триъгълника е съставена от Кимбърлин, виж (Kimberling). В базата данни на Кимбърлин точките имат имена, включващи номер от вида $X(n)$, където n е естествено число. Понастоящем n е около 5600, тоест, понастоящем базата данни на Кимбърлин съдържа около 5600 точки. В перспектива към имената на обектите на “Откривател” може би ще бъдат добавени и номера.

Името на един обект на “Откривател” е на английски език и описва обекта. Например, за центъра на вписаната в триъгълник окръжност използваме името “Incenter”, за медицентъра използваме името “Centroid”, за произволен триъгълник използваме “Triangle ABC”, за Ойлеровия триъгълник използваме името “Euler Triangle”, за описаната около триъгълника ABC окръжност използваме името “Circumcircle” и т.н. Обекти, в името на които не е указано за кой триъгълник се отнасят, се отнасят за триъгълника “Triangle ABC”. Можем да говорим и за обекти с имена “Incenter of the Euler Triangle”, “Euler Triangle of the Euler Triangle”, “Circumcircle of the Euler Triangle of the Euler Triangle of the Euler Triangle” и т.н.

Името на един обект еднозначно определя обекта. Главните букви в имената на обектите означават, че се касае за име на обект на “Откривател”. Имената на обектите не винаги могат да бъдат прочетени еднозначно, ако не

спазваме определени правила. Както е известно, естествените езици, като английският и българският езици, са нееднозначни и понякога един израз може да описва различни обекти, ако се интерпретира по различен начин. Правилата за формиране на имената на обектите на “Откривател” са изяснени в “Ръководство на потребителя на компютърната програма “Откривател””, което е в подготовка.

Понастоящем “Откривател” има няколко стотици първични обекта с първични имена, като например “Incenter” и около 2 милиона производни обекта с производни имена, като например “Incenter of the Euler Triangle”. Производните имена се композират от първичните имена по определени правила. Пълно изброяване на първичните имена е дадено в ръководството на потребителя. Ще дадем още няколко примера на производни обекти: “Midpoint of the Incenter and the Centroid”, “Perspector of Triangle ABC and the de Villiers Triangle”, “Inverse of the Incenter in the Circumcircle”.

Ще отбележим, че в “Откривател” първоначално се задават само първичните обекти. Останалите обекти, с техните имена, описания и допълнителните атрибути, се композират от “Откривател” от първичните обекти, като се следват определени правила. Тези правила за производство на нови обекти от дадени обекти се наричат продукционни правила.

Съгласно Нилсон, втората основна компонента на една продукционна система за изкуствен интелект, след базата данни, са продукционните правила (за по-кратко често казваме само “правила”, на английски език “rules”). Продукционните правила служат за да генерираме нови обекти от дадени обекти. Продукционните правила в “Откривател” са функции на езика РНР, създадени специално за целите на компютърната програма. Една функция на РНР има аргументи и стойност. Аргументите и стойността на функцията са обекти на “Откривател”. Тоест, едно продукционно правило съпоставя на обект или обекти на “Откривател” друг обект или обекти (стойността на функцията може да бъде масив, който се състои от много обекти).

Правилата на “Откривател” имат имена, които отразяват тяхната роля в евклидовата геометрия. Примери на имена на правила: “Circumcircle”, “Euler Triangle”, “Perspector”, “Midpoint” и т.н. Името на едно правило може да съвпада с името на обект, но няма опасност от смесване.

Обектите и правилата съвместно композират нов обект или обекти. Например правилото “Circumcircle” приложено към обекта “Euler Triangle” формира обекта “Circumcircle of the Euler Triangle” (окръжност, описана около ойлеровия триъгълник). Когато композираме името на нов обект, в някои случаи използваме добавката “of the” или (“wrt the” - with respect to the) след името на правилото, така, както е в горния пример.

Понастоящем “Откривател” има стотици правила. Пълен списък на правилата на “Откривател” е даден в ръководството на потребителя. Още няколко примера на правила: “Harmonic Conjugate”, “Isogonal Conjugate”, “Inner Apollonius Circle”, “Outer Apollonius Circle”, “Excircles”, “Radical Center”, “Symmedian Point”, “Steiner Circumellipse” и т.н.

На този етап “Откривател” съдържа само обекти, построими с линияка и пергел, като целта е била компютърната програма да обслужва главно учениците. Авторите планират разширение, което да включва и обекти, които

не са построими с линейка и пергел. Правилата на “Откривател” позволяват бързо построяване на геометрични обекти. Например, правилото “Outer Apollonis Circle” прилагаме към три дадени окръжности, като правилото построява окръжност, която се допира вътрешно до тези три дадени окръжности. Ако тръгнем да построяваме тази окръжност с поредица от операции с линейка и пергел, ще трябва да използваме относително дълга поредица от построения. С използването на това правило направо построяваме търсената окръжност.

Обикновено “Откривател” прилага едно правило към много обекти едновременно. Това става, като правилото бива прилагано към обектите един по един, в реда в който са зададени. Поради тази причина можем да говорим за “блок от обекти”, към които прилагаме правилото, а правилото можем да третираме като ново правило, което е списък на правила. Например, правилото “Cevian Triangle” приложено към блок от точки ще генерира блок от триъгълници. Ако в началния блок има точка “Orthocenter”, в крайния блок ще има точка с име “Cevian Triangle of the Orthocenter”.

“Откривател” може да прилага едновременно и “блок” от еднородни правила към един или няколко обекта. Например, ако към триъгълника “Euler Triangle” приложим блок от правила за забележителни точки на триъгълника, включващ правилото “Incenter”, изходът ще бъде блок от точки, включващ точката “Incenter of the Euler Triangle”.

Използването на блокове от обекти и правила в “Откривател” играе важна роля. Глобалната база данни на “Откривател” има милиони обекти, които са произведени с прилагането на блокове от правила към блокове от обекти. Потребителите могат да създават нови бази данни с използване на блокове от обекти и правила. По-нататък ще бъдат дадени примери.

В моделния пример на разложима система за изкуствен интелект, даден от Нилсон в учебника му на стр. 41, участват малък брой обекти и малък брой продукционни правила – само три обекта и само четири продукционни правила. Това е добър пример, овладяването на който ще позволи добро разбиране на обектите и продукционните правила на една система за изкуствен интелект. Подобни примери, с малък брой обекти и правила, могат да бъдат създадени, като бъдат взети някои от обектите и правилата на “Откривател”. В редица случаи, при изучаване на определена тема, ние използваме само някои от обектите и някои от правилата. В учебника на Нилсон, на стр.43, е дадена фигура, илюстрираща прилагането на правила към обекти в моделния пример на Нилсон. На фигурата е дадено дърво от типа И/ИЛИ. Оставяме на читателя да чертае дървета от типа И/ИЛИ на моделни примери, ако желае това. Както е известно и като се вижда и от другите два примера, дадени в същия раздел на учебника на Нилсон, реалните системи за изкуствен интелект имат много обекти и много продукционни правила.

Ще отбележим, че “Откривател” е модулна система за изкуствен интелект, което означава, че нови обекти и нови правила могат да бъдат добавяни независимо от останалите, когато и колкото е необходимо.

Съгласно Нилсон, третата основна част на една продукционна система за изкуствен интелект е системата за управление. Системата за управление на “Откривател” ще бъде разгледана в друга статия.

Тъй като основното предназначение на “Откривател” е да разработва теми, системата за управление предоставя на потребителя възможност да избере измежду предварително зададени шаблони за разработване на теми. Различните шаблони разработват темата с различна степен на дълбочина. Потребителят може да избере и тема за изследване, измежду теми от списъци с препоръчителни теми. Планира се тези списъци да съдържат няколко хиляди препоръчителни теми. Избирайки тема и шаблон за изследване, потребителят ще получи разработената тема. В някои случаи темата ще съдържа хиляди теореми, по-голямата част от които нови, за първи път открити от компютъра. Възможно е потребителят да предпочете своя схема за изследване и евентуално своя тема. В такъв случай той ще може да разработи темата така, като желае, като се откаже от шаблоните и ползва другите инструменти на “Откривател”.

Забележителни обекти в евклидовата геометрия

Глобалната база с обекти на “Откривател” се формира както следва. Както беше вече казано, в “Откривател” дефинираме обекти, които наричаме *примитивни*. Тези примитивни обекти са точки, триъгълници, окръжности, прави, триади от окръжности и т.н. След това с помощта на правила (които наричаме също така “операции”), от примитивните обекти получаваме нови обекти. Операциите са известните операции, които използваме в евклидовата геометрия. Към множеството на примитивните обекти и получените производни обекти прилагаме отново операциите и получаваме нови производни обекти и т.н. За да получим интересните обекти в евклидовата равнина, трябва да използваме подходящо множество от примитивни обекти и подходящо множество от операции. По този начин, след подходящо многократно прилагане на правилата към примитивните обекти, получаваме множество от обекти, които формират глобалната база данни на “Откривател”. Ако се окаже, че има интересни обекти, които сме пропуснали да бъдат включени в базата данни на “Откривател”, то пропуснатите обекти могат да бъдат направо добавени в базата данни.

Горният подход може да послужи, за да съставим дефиниция на понятие като “забележителна точка на триъгълника” или по-общо, “забележителен обект на триъгълника”. Ще отбележим, че дефинициите на забележителни обекти, която използваме, са аналогични на дефиницията на елементарна функция в математическия анализ. Както знаем, елементарна функция е функция, която може да бъде зададена с една формула от вида $y = f(x)$, където $f(x)$ е израз, съставен от основни елементарни функции и константи с помощта на краен брой операции събиране, изваждане, умножение, деление и суперпозиция. В нашите дефиниции ролята на основните елементарни функции играят примитивните обекти, а операции са основните операции в евклидовата геометрия.

Авторите намериха в литературата две концепции за това, какво е “забележителна точка на триъгълника”.

Първоначално за “забележителни” точки на триъгълника се считат точките, които са изброени като такива в литературата. Този подход води началото си от античната гръцка геометрия и се използва и понастоящем в литературата. Виж например (Паскалев & Чобанов).

През 90-години на миналия век Кимбърлин (Kimberling) дава дефиниция на “забележителни точки на триъгълника” (наричани от Кимбърлин “triangle centers” - “центрове на триъгълници”). Кимбърлин въвежда трилинейна координатна система в евклидовата равнина и дефинира забележителните точки на триъгълника, като точки, трилинейните координати на които удовлетворяват определени условия. По същия начин Кимбърлин дефинира и други видове забележителни обекти на триъгълника. Ще отбележим, че в последно време се използва не трилинейна, а барицентрична координатна система. За барицентричната координатна система виж (Гроздев & Ненков, 2012a,b)

Концепцията за дефиниция на “забележителни точки на триъгълника”, и по-общо, “забележителни обекти на триъгълника”, заложена в “Откривател”, се отличава от концепцията на Кимбърлин. Ще отбележим, че можем да се ограничим с обекти, построими с линейка и пергел или да разгледаме и такива, които не са построими с линейка и пергел. По-долу посочваме някои разлики на нашия подход с подхода на Кимбърлин.

Първо, ние не въвеждаме координатна система, а ползваме синтетичната евклидова геометрия, която е по-близко до учениците.

Второ, Кимбърлин налага неприемливи ограничения в дефинициите на забележителни обекти. Това води до обстоятелството, че обекти, построими с линейка и пергел, не се включват в дефинициите на Кимбърлин. Например, точките на Брокер не удовлетворяват дефиницията на Кимбърлин за “triangle centers”. Точките на Брокер обаче се считат в литературата за “забележителни точки на триъгълника”. Ще отбележим, че нашата дефиниция включва обектите, построими с линейка и пергел, следователно точките на Брокер удовлетворяват нашата дефиниция.

Трето, подходът на Кимбърлин е дескриптивен (т.е. описателен). Кимбърлин казва кои обекти са забележителни обекти, но не посочва начин за тяхното построяване. Нашето определение е конструктивно. То показва как могат да бъдат построени забележителните обекти. При машинен подход към генерирането на нови обекти нашият подход е задължителен.

Разликата в подходите води и до разлика в начина, по който е построена базата данни. Кимбърлин включва точките в базата си данни ad hoc, тоест всяка точка е определена сама за себе си, както това е в античната гръцка геометрия. Компютърната програма “Откривател” е първата в света, в която базата данни с обекти от евклидовата геометрия е построена с продукционни правила.

Идентифициране на забележителни обекти

В днешно време се провеждат интензивни изследвания в областта на евклидовата геометрия, в които се включват все повече хора. Например, в уеб форуми в последните години са публикувани над двадесет хиляди постинга, много от които са на нивото на научни изследвания. Нарастващата активност в областта на евклидовата геометрия до голяма степен е стимулирана от новите технологии, включващи компютърни програми за динамична геометрия, като C.a.R (“Compass and Ruler”) и други. Възражда се и интересът към геометричните построения с линейка и пергел, стимулиран от лесното построяване на геометрични обекти с електронни линейка и пергел в компютърните програми за динамична геометрия.

В уеб форумите често някой участник задава въпрос за даден геометричен обект, дали не е вече известен в литературата. Обширната литература по евклидова геометрия и многобройните публикации, особено в последно време, правят въпроси от този вид актуални.

Ще дадем един пример. Нека искаме да изучим окръжността, която е инверсен образ на окръжността на деветте точки “Nine-Point Circle” (в България популярна също така като “окръжност на Ойлер”) относно радикалната окръжност на триадата на външнописаните окръжности. Като първа стъпка, трябва да изискаме “Откривател” да представи списък с ролите на обекта. В конкретния случай виждаме, че една от ролите в този списък е ролята, наречена “Аполониева окръжност”. Това е окръжността, която се допира вътрешно до трите външнописани окръжности. Можем да заключим, че обектът, който искаме да изследваме, е Аполониевата окръжност. Също така, можем да добием първи впечатления за този обект, разглеждайки ролите му. Можем да отбележим, че можем да построим с линейка и пергел този обект като инверсен образ на една добре известна окръжност – окръжността на Ойлер. Този пример може да изглежда елементарен, и от гледна точка на “Откривател” е елементарен, но съвпадението на Аполониевата окръжност е посочената роля като инверсен образ, е открито едва през 2002 г., като резултатът е публикуван в научна статия на Darij Grinberg и Paul Yiu.

Процедури на “Откривател”

Процедурата, с която “Откривател” предоставя ролите на един обект е една от често използваните процедури на “Откривател”. Ще отбележим, че с тази процедура могат да бъдат получени множество нови резултати и за обекти, считани за отдавна добре изучени, като например четирите забележителни точки на триъгълника, известни от античната гръцка геометрия. На тази тема ще бъдат посветени други статии на авторите, а евентуално и изследвания на ученици.

Както отбелязахме по-горе, в много случаи един геометричен обект може да бъде построен по няколко различни начина, което води до различни описания на обекта, които наричаме *роли*. Таблица с роли на обекти съдържа обект или обекти, които са представени с поне две роли, докато таблица с обекти съдържа по една роля за всеки обект от таблицата.

Прието е от многото различни роли да бъде избрана една роля, която се счита за основна и се приема за дефиниция на обекта. Редица обекти в евклидовата геометрия имат утвърдени дефиниции. При машинното генериране на обекти обаче получаваме много нови обекти, за които няма утвърдена дефиниция. Поради тази причина едно приемливо решение е следното. Можем да считаме всички роли за равностойни. Всяка таблица с роли на обекти се разбива на класове на еквивалентност, като в един клас на еквивалентност са ролите на един обект. Можем да изберем всяка роля от този клас като представител на класа. Възможно е да ползваме и подход, при който всички известни роли на един обект дефинират обекта.

Таблиците с роли на обекти и таблиците с обекти се използват за различни цели. Например, за да намерим ролите на един обект, използваме таблица с роли, съдържаща ролите на обекта. Ако обаче искаме да намерим

забележителни точки, които лежат върху дадена права или дадена крива, е редно да използваме таблица с обекти, за да може броят на ролите, които намерим, да е равен на броя на точките.

Компютърната програма “Откривател” използва редица процедури за обработка на таблици и блокове с обекти. Една процедура, която често използваме, е процедурата, наречена “Cleaning” (“чистене”). Тази процедура се прилага към блок с роли на обекти, като получаваме блок, който е “изчистен” от излишните роли, тоест съдържа по една роля за всеки обект. Например, ако искаме да намерим точките, които лежат върху дадена крива, можем да използваме блок с роли на точки, като впоследствие изчистим намерения блок с роли и по този начин получим по една роля за всяка точка.

За да използваме ефективно “Откривател”, съществено е да имаме процедура, която ни казва кои от обектите, които сме избрали за изучаване, са нови, неизучени в литературата. На този етап “Откривател” има една такава процедура. Това е процедурата “Partial Identification of Points” (“Частична идентификация на точки”). Процедурата сравнява точките с най-обширната база данни на точки, известна до момента в литературата, а именно базата данни на (Kimberling), която понастоящем съдържа около 5600 точки. Можем да считаме, че ако една точка не е включена в тази база данни, то точката не е изучена в литературата. Процедурата “Частична идентификация на точки” има като вход списък с точки и има като изход шест файла, произведени от “Откривател”. Тези файлове се подреждат в специална папка. Файловете са в HTML-формат, както всички файлове, които “Откривател” произвежда за потребителя. Ще отбележим, че тъй като “Откривател” произвежда файлове в HTML-формат, то произведените файлове са готови за поставяне в интернет, което е съществено удобство.

Първият файл, “1_List_P.htm”, съдържа списък с точките, които трябва да бъдат идентифицирани. Това е входният списък с точки, който тук е повторен за наше удобство.

Вторият файл, “2_List_K.htm” (“K” от Kimberling), съдържа списък с точките, за които е установено, че са включени в базата данни на Кимбърлин, а третият файл, “3_List_D.htm” (“D” от difference, разлика на списъци), съдържа списък с точките, които не са включени в базата данни на Кимбърлин. Ясно е, че вторият и третият списъци имат общо толкова точки, колкото първия списък. Ясно е също така, че файлът “2_List_K.htm” не съдържа точки, ако сред входните точки няма такива, които са включени в (Kimberling), а обратното, файлът “3_List_D.htm” не съдържа точки, ако всички входни точки са включени в (Kimberling).

По-нататък, “Откривател” изготвя файл “4_List_P-X.htm”, който съдържа списък с теореми, в които се указва съответствието на входни точки с точки от базата данни на Кимбърлин. Последният списък е преписан още два пъти, в табличен вид, във файловете “5_Table_P-X.htm” и “6_Table_X-P.htm”. В имената на файловете P-X означава, че в съответния списък първо е поставена точката, която идентифицираме, а след това нейния номер в базата данни на Кимбърлин, X-P означава обратното подреждане.

Читателят може да намери примери на използване на процедурата “Частична идентификация на точки” в редица статии, например в статията (Grozdev & Dekov, 2014a).

Компютърно-генерирана енциклопедия по евклидова геометрия

При наличието на компютърна програма от типа на “Откривател”, естествено възниква идеята да бъде съставена колекция от резултати, произведени от тази компютърна програма. ”Компютърно-генерираната енциклопедия по евклидова геометрия” е отговорът на тази идея. Енциклопедията е колекция от разработени теми по евклидова геометрия. Същевременно, идеята е енциклопедията да служи и като форум за обмен на изследвания на изследователи, учители, ученици и студенти. Авторите се надяват, че енциклопедията ще стане и библиотека, която съдържа реферати и научни трудове на ученици и студенти и по този начин ще съдейства за активизирането на интереса на учащите се към математиката.

Енциклопедията е в HTML-формат. Този формат е най-удобен за целите на енциклопедията. Временен уеб адрес на енциклопедията:

<http://eg-enc.webege.com/index.htm>

Горният адрес е регистриран на безплатен уеб хостинг, като след време може би енциклопедията ще бъде разположена и на платен хостинг със собствен домейн.

Енциклопедията е в процес на разработване и ще бъде допълвана на части, примерно един път месечно или при необходимост. Първото издание на енциклопедията се очаква да бъде готово след две или три години. Компютърната програма “Откривател” е модулна и лесно може да бъде разширявана с нови обекти и продукционни правила, а евклидовата геометрия е обширна, така че работата както по компютърната програма “Откривател”, така и по енциклопедията, ще продължи и след техните първи издания. Може да се отбележи, че енциклопедиите (Kimberling), (Weisstein) и (Quim) са създадени в малък обем преди около 15 години, като впоследствие многократно са разширявани и продължават да бъдат разширявани. Подготвяната енциклопедия трябва да включва резултатите от (Kimberling) и (Quim), както и частта от (Weisstein), която се отнася до евклидовата геометрия, но трябва да включва и много други неща. По този начин, подготвяната енциклопедия се очаква да бъде най-пълната енциклопедия по евклидова геометрия в света. Посочените енциклопедии са разработвани без участие на потребители, докато идеята на подготвяната енциклопедия е да бъдат максимално включени потребители, най-вече ученици и студенти от България.

Понастоящем както компютърната програма, така и енциклопедията са на английски език, но е възможен и желателен превод на други езици в бъдеще. Може да се отбележи, че прототипът на енциклопедията, създаден през 2006 г., е преведен през 2013 г. на руски език от руски специалисти по тяхна инициатива.

Както се вижда от страницата “Contents”, на която е съдържанието на енциклопедията, енциклопедията се състои от раздели.

Разделът “Definitions” съдържа дефинициите, които се използват в енциклопедията и в компютърната програма “Откривател”. По този начин, на

потребителя няма да се налага да търси в други източници. Трябва де се отбележи, че този раздел е важен и за това, че се налага в енциклопедията да бъдат използвани редица нови дефиниции, а е и целесъобразно да бъдат променени някои дефиниции с цел унификация. Тъй като енциклопедията се очаква да съдържа голям брой производни обекти, дефинициите на които няма как да бъдат изброени, вероятно към този раздел ще бъдат добавени правилата за четене на имената на обектите. Дефинициите са илюстрирани с графики, произведени от компютърната програма CaR (“Compass and Ruler”). Възможно е да бъдат включени и файловете на CaR, с които са произведени графиките. По този начин потребител, снабден с безплатната програма CaR ще може да ползва и файловете. Възможно е този раздел да бъде придружен и от комплект от макроси на CaR, които ще дадат възможност на потребителя бързо да конструира геометрични обекти с CaR. Компютърната програма CaR има вграден комплект от макроси, но този комплект включва относително малък брой макроси. Всяка от дефинициите в този раздел ще бъде придружена с примери.

Разделът “Catalogue” е основен в енциклопедията. Този раздел съдържа разработени теми, подредени в каталози, които общо формират един голям каталог.

Разделът “Database” е описва глобалната бази данни на “Откривател”. Тази база данни съдържа милиони обекти от различни видове – точки, триъгълници, окръжности и т.н. Глобалната база данни може да бъде ползвана, при необходимост, от потребителя на “Откривател”. При определени задачи потребителят може да ползва и блокове с обекти и блокове с правила, които са предварително подготвени. Готовите блокове с обекти и правила могат да бъдат използвани при разработването на редица теми. Вероятно в този раздел ще бъдат дадени и каталозите на готовите блокове. Ще отбележим, че готовите блокове с обекти – това са специално разработени таблици в базата данни на “Откривател”. Евклидовата геометрия е обширна и непрекъснато се разширява, така че глобалната база данни на “Откривател” е необходимо непрекъснато да бъде попълвана и подобрявана. Що се касае до оптимизирането на глобалната база данни, то това е процес, който е разработен в литературата по изкуствен интелект, но е свързан с огромен брой пресмятания, които на практика са във възможностите само на суперкомпютър. Това е интересна задача и може би ще бъде решена от заинтересовани изследователи. На този етап глобалната база данни е формирана на базата на преценки на авторите на проекта. Друг интересен въпрос е попълването на описанието на обектите с литературни справки.

Разделът “Constructions” е енциклопедия на геометричните построения с линейка и пергел, както известни, така и нови, получени с помощта на “Откривател”. Авторите считат, че геометричните построения с линейка и пергел играят важна роля в евклидовата геометрия, а също така и образованието по математика и трябва да имат подобаващо място както в изследванията, така и в образованието. Възможно е включването на допълнителни въпроси, като сложност на геометричните построения, в стила на (Лазаров & Табов, 1988), (Табов & Лазаров, 1990). Геометричните построения могат да бъдат представени като анимации на CaR. Този метод позволява бързо създаване на построенията, а заедно с това тяхното удобно преглеждане. Една част от този раздел могат да бъдат построения, представени в стила на енциклопедията на

геометричните построения с линейка и пергел, създадена през 2005 г. от един от авторите. Може да се отбележи че споменатата енциклопедия на геометричните построения е преведена през 2013 г. на руски език от руски изследователи.

В раздела “Articles” ще бъдат представени статиите от различни автори, които се отнасят до “Откривател”.

В раздела “Problems” ще бъдат дадени теореми, включени в енциклопедията, преформулирани като задачи. По същество, този раздел ще играе ролята на сборник със задачи за средното училище. Повече по този въпрос читателят може да намери в статията (Гроздев & Деков, 2013b).

Разделът “User's Manual” е ръководство на потребителя на компютърната програма “Откривател”. Този раздел ще съдържа и примерни теми за разработване, както и описание на шаблоните, които “Откривател” предлага за тяхното разработване.

В разделите “Researcher's Corner” и “Teacher's Corner” ще бъдат представени научни изследвания и бележки съответно на изследователи и учители. Разделът “Student's Corner” ще бъде библиотека от реферати, дипломни работи и разработени теми от ученици и студенти.

Разделът “Contributors” съдържа списък на лицата, които имат авторски материали, включени в енциклопедията. При разработването на всички раздели на енциклопедията, а може би и при разработването на някои части на “Откривател”, авторите ще разчитат на активното участие на голям брой потребители, на първо място ученици, студенти, учители, изследователи, а също така преподаватели във висши училища. Любителите на евклидовата геометрия също са добре дошли. Авторите се надяват, че енциклопедията ще бъде колективно творчество на много хора. За всеки автор ще има отделна уеб страница, като за всеки автор ще бъде посочено какви приноси има и ще бъдат дадени линкове към тези приноси. Желателно е да бъдат включени и кратки сведения за всеки отделен автор, като сведенията са одобрени от отделните автори.

Разделът “Bulgarian Section” съдържа материали на български език.

Страницата “Donate” приканва посетителя на сайта да допринесе за разработването на компютърната програма и енциклопедията, като спонсорира издаването им.

В перспектива е възможно и създаване на уеб сайт от типа на “уикипедия”, посветен на приносите на компютърната програма “Откривател”. В този сайт потребителите сами ще допълват резултатите. Такъв уеб сайт може да бъде изготвен, като бъде използван готовия безплатен шаблон, който е наличен в интернет. Шаблонът на “уикипедия”, както и останалите шаблони за изготвяне на уеб сайтове, налични в интернет, е изготвен с PHP и MySQL, като преработването на шаблона до работещ уеб сайт се извършва също с тези софтуерни инструменти.

Литература

1. Гроздев, С. & Ненков, В. (2012a). Три забележителни точки върху медианите на триъгълника, София: Архимед.

2. Гроздев, С. & Ненков, В. (2012b). Около ортоцентъра в равнината и пространството, София: Архимед.
3. Гроздев, С. & Деков, Д. (2013a). По пътя към първата компютърно-генерирана енциклопедия, *Математика и информатика*, № 1, 49-59.
4. Гроздев, С. & Деков, Д. (2013b). Някои приложения на компютърната програма “Откривател”, *Математика и информатика*, № 5, 444-455.
5. Гроздев, С. & Деков, Д. (2013c). Компютърно-генерирана математика: Разработване на тема от евклидовата геометрия, ръкопис.
6. Гроздев, С. & Деков, Д. (2013d). Компютърно-генерирана математика: Произведения на Косинуса в евклидовата геометрия, ръкопис.
7. Гроздев, С. & Деков, Д. (2013e). Компютърно-генерирана математика: Трансформации на точки в евклидовата геометрия, ръкопис.
8. Гроздев, С. & Деков, Д. (2013f). Компютърно-генерирана математика: Бележка за триъгълника на Хаимов, ръкопис.
9. Гроздев, С. & Деков, Д. (2013g). Компютърно-генерирана математика: Бележка за екстремалните задачи в теорията на триъгълника, ръкопис.
10. Grozdev, S. & Dekov, D. (2014a). Learning by Discoveries, *Journal of Computer-Generated Mathematics*, no 1.
11. Паскалев Г. & Чобанов, И. (1985). Забележителни точки в триъгълника, София, Народна Просвета.
12. Нильсон, Н. (1985). Принципы искусственного интеллекта, Москва, Радио и связь. Оригинал: Nilsson, N. (1980). Principles of Artificial Intelligence, Palo Alto, CA, Tioga Publishing Co.
13. Котев Р., Аполониеви задачи, Национален конкурс “Млади таланти”, научен консултант: Христо Христов, PDF-формат.
14. Quim Castellsaguer, The Triangles Web, <http://www.xtec.cat/~qcastell/tw/ttweng/portada.html>
15. Kimberling C., Encyclopedia of Triangle Centers (ETC), <http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html>
16. Simon & Newell, (1958) Heuristic problem solving: The next advance in operations research, *Operations Research*, 6(1), 1–10.
17. Weisstein E., MathWorld - A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/>

Sava Grozdev, Sofia, Bulgaria, sava.grozdev@gmail.com

Deko Dekov, Stara Zagora, Bulgaria, ddekov@ddekov.eu