Journal of Computer-Generated Mathematics

Изучаване с помощта на компютърната програма “Откривател” на криви от втора степен, описани около даден триъгълник

Сава Гроздев, Деко Деков

Publication date: 25 February 2014

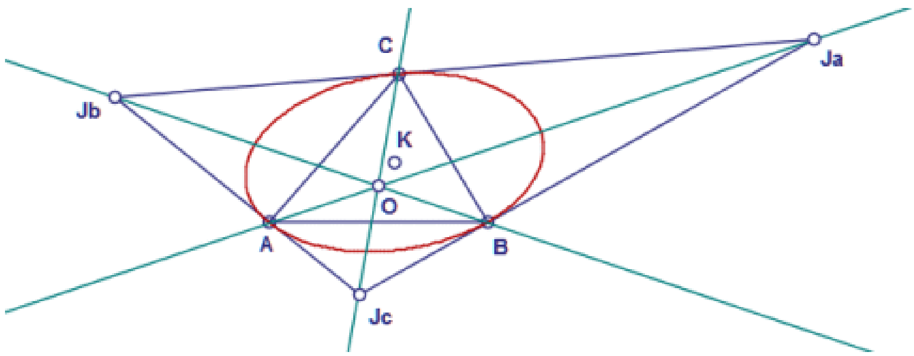
Резюме. Комплектът, включващ три компютърни програми, а именно, програмата за открития “Откривател”, програмата за динамична геометрия C.a.R. и програмата за компютърна алгебра Maple, е ефективен инструмент за изследвания в евклидовата геометрия. Авторите показват как този комплект може да бъде използван за разработване на реферат или дипломна работа от студенти или ученици.

В тази статия авторите разглеждат използването на компютърната програма “Откривател” за изследване на криви от втора степен, които минават през върховете на даден триъгълник. Авторите предполагат, че читателят е запознат със статиите (Гроздев & Деков, 2013a,b, 2014a-c). Читателят може да се запознае с барицентричните координати по монографиите (Гроздев & Ненков, 2012a,b).

C-коники

C-коника (“circumconic”) ще наричаме крива от втора степен в равнината на триъгълника *ABC*, която преминава през върховете на триъгълника. Триъгълникът *ABC* наричаме референтен триъгълник. Ако кривата е елипса, хипербола или парабола, говорим съответно за *C*-елипса, *C*-хипербола и *C*-парабола. Правите, които преминават през върховете на триъгълника *ABC* и са допирателни до *C*-кониката, формират триъгълник, наречен допирателен триъгълник на *C*-кониката. Допирателният триъгълник е перспективен с триъгълника *ABC*. Перспекторът на тези два триъгълника се нарича перспектор на *C*-кониката. Допирателният триъгълник на *C*-кониката е античевианният триъгълник на перспектора на *C*-кониката.

Фигура 1 илюстрира тези понятия. На фиг.1 е изобразен триъгълникът *ABC* и *C*-коника, която за начертания триъгълник е *C*-елипса. Перспекторът на тази *C*-елипса е центърът на описаната около триъгълника *ABC* окръжност ("Circumcenter"). Центърът на тази *C*-елипса е точката на Лемоан ("Symmedian Point'). На фиг.1 точка *O* е центърът на описаната около *ABC* окръжност, точка *K* е точката на Лемоан, $JaJbJc$ е допирателният триъгълник. Триъгълникът $JaJbJc$ е античевианният триъгълник на точка *O*. Точка *O* е перспектор на триъгълниците *ABC* и $JaJbJc$, т.е. правите AJa, BJb и CJc се пресичат в точка *O*.



Фиг. 1

Уравнението на една *C*-коника в барицентрична координатна система (x, y, z) е както следва (Yiu, 2001):

$$pyz + qzx + rxy = 0$$

където (p,q,r) са барицентричните координати на перспектора на *C*-кониката. Очевидно е, че *C*-кониката е зададена, когато е зададен нейният перспектор.

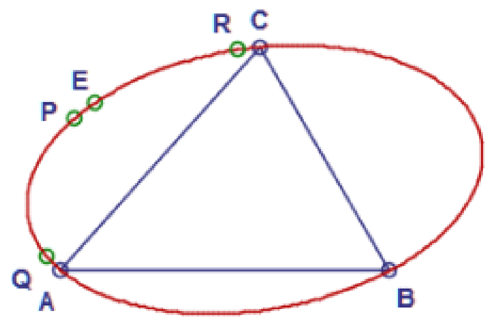
Ще въведем някои определения. *Определяща права* на *C*-кониката ще наричаме правата, която е изогонална на *C*-кониката. *Определяща точка* на *C*-кониката ще наричаме точката, която е изогонална на перспектора на *C*-кониката. *Асоциирана C-коника* на дадена коника ще наричаме *C*-кониката, която има за център перспектора на дадената *C*-коника. Ако две *C*-коники са асоциирани, ще казваме, че техните перспектори са *асоциирани.* Две *C*-коники са асоциирани тогава и само тогава, когато техните перспектори са асоциирани. Ако c е *C*-коника с перспектор P и център Q, и ако c_1 е асоциираната на c *C*-коника, то точка Q е перспектор, а точка P е център на c_1.

Една *C*-коника може да бъде зададена по различни начини. Ако е даден триъгълникът *ABC*, то една *C*-коника е зададена, ако е даден

1. Перспекторът на *C*-кониката, или
2. Центърът на *C*-кониката, или
3. Определящата права на *C*-кониката, или
4. Определящата точка на *C*-кониката, или
5. Уравнението на *C*-кониката в барицентрични координати, или
6. Уравнението на *C*-кониката в декартови координати.

Една C-коника е елипса, парабола или хипербола, ако броят на пресечните точки на определящата права на C-кониката и описаната около ABC окръжност е съответно равен на 0,1 или 2. Ще отбележим, че видът на една C-коника в някои случаи зависи от вида на референтния триъгълник, например дали триъгълникът е остроъгълн или тъпоъгълен, както и от конкретните стойности на ъглите на триъгълника.

Ако е зададен перспекторът на една C-коника, можем да намерим, виж (Yiu, 2001, стр.109), центърът на C-кониката. Три точки, които лежат върху една C-коника са известни – това са върховете на триъгълника ABC. Можем да намерим, виж (Yiu, 2001, стр.105 и стр.109), още две точки, които лежат върху C-кониката, наречени четвърта и пета пресечни отчки. Четвъртата пресечна точка е пресечната точка на C-кониката и окръжността, описана около ABC, а петата пресечна точка е пресечната точка на C-кониката и нейната асоциирана C-коника.



Фиг. 2

Фигура 2 илюстрира тези понятия. На фигура 2 е начертана отново C-кониката с перспектор центърът на описаната около ABC окръжност. За начертания триъгълник тази C-коника е C-елипса. За изследваната С-коника четвъртата и петата пресечни точки съвпадат, като съвпадат с рефлексната точка на Ойлер (Euler Reflection Point). На фиг.2 точка E е рефлексната точка на Ойлер. Точки P, Q и R ще бъдат пояснени в следващия параграф.

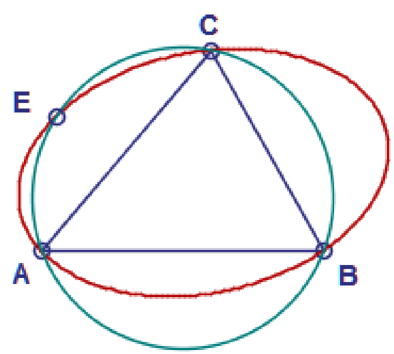
2. Откриване с "Откривател" на забележителни точки, които лежат върху една *C*-коника

Една от трудните задачи при изследването на криви в равнината на триъгълника ABC, е откриването на забележителни точки на триъгълника, които лежат върху изследваната крива. Този задача е трудна, ако не използваме компютър. Поради тази причина за много C-коники в литературата липсват сведения за забележителни точки, които лежат върху кривата. Точки, които лежат върху дадена крива могат да бъдат открити от "Откривател", като "Откривател" претърси базата си с данни. Освен това, в някои случаи, изхождайки от намерените точки, можем да открием закономерности, които водят до теореми за построяване с операции на забележителни точки върху кривата. Подобна зависимост, ако бъде открита, съществено разширява броя на забележителните точки върху кривата.

Ще отбележим, че намерените от “Откривател” точки лежат върху C-кониката при фиксиран вид на триъгълника ABC (например остроъгълен или тъпоъгълен), като в повечето случаи точките лежат върху C-кониката независимо от вида на триъгълника ABC. За всяка точка потребителят трябва да направи проверка и да очертае вида на триъгълника ABC, при който точката лежи върху C-кониката. Авторите на “Откривател” планират да създадат модул, който извършва посочения анализ, но засега този модул не е готов.

В тази статия ще изследваме забележителните точки, които лежат върху C-кониката, използвана по-горе, а именно, C-кониката с перспектор центърът на описаната около ABC окръжност. Тази C-коника е по-особена, в смисъл че C-кониката, която е асоциираната на тази C-коника, е окръжността, описана около триъгълника ABC. Окръжността, описана около триъгълника ABC е C-коника имаща за перспектор точката на Лемоан и имаща за център центърът на описаната около ABC окръжност. Оттук се вижда, че четвъртата и петата пресечни точки съвпадат, защото и в двата случая това е пресечната точка на C-кониката с център точка O и описаната около ABC окръжност. Както беше казано по-горе, пресечната точка съвпада с рефлексната точка на Ойлер.

Фигура 3 илюстрира казаното по-горе. На фиг.3 е начертана C-кониката с перспектор O и окръжността, описана около триъгълника ABC. С E е означена рефлексната точка на Ойлер.



Фиг. 3

Доколкото на авторите е известно, рефлексната точка на Ойлер засега е единствената забележителна точка на триъгълника, която лежи върху изследваната C-коника с перспектор точката O и която е отбелязана в литературата. Така че представлява интерес да намерим и други забележителни точки на триъгълника, които лежат върху изучаваната C-коника.

Резултатът от изследването с “Откривател” на забележителни точки на триъгълника, които лежат върху C-кониката с перспектор O, е даден в приложените компютърни файлове в HTML-формат. Виждаме, че “Откривател” е намерил 53 забележителни точки, които лежат върху изследваната C-коника. Единадесет от намерените 53 точки са включени в енциклопедията на Кимбърлин Encyclopedia of Triangle Centers (ETC). Останалите 42 забележителни точки не са включени в тази енциклопедия, така че можем да очакваме, че за тях няма публикувани резултати. Можем да очакваме, че тези точки не са отбелязани в литературата като точки, които лежат върху изучаваната C-коника.

Три от намерените точки са изобразени на фиг.2 по-горе. Точка P е “Product of the Kosnita Point and the Steiner Point”, точка Q е “Product of the Prasolov Point and the Steiner Point”, а точка R е точката “Quotient of the Euler Reflection Point divided by the Exeter Point”. Тези точки са включени в List D, където са с номера 7, 8 и 12 съответно. Тези три точки не са включени в (Kimberling).

3. Използване на програмата за динамична геометрия C.a.R.

Можем да използваме програма за динамична геометрия, за да начертаем C-кониката. Програмата за динамична геометрия C.a.R. е удобна, тъй като с нея лесно се създават и използват макроси. Компютърната програма C.a.R. е безплатна и с отворен код. Налична е за изтегляне в Интернет. Създател на програмата е Rene Grothmann, професор в университет в Германия.

За да създадем макрос на една крива от втора степен е необходимо да построим пет точки, които лежат върху кривата. В случая на C-коника, три точки са известни - това са върховете на триъгълника ABC. Останалите две точки можем да изберем измежду точките, които “Откривател” е открил, че лежат върху C-кониката, като можем да използваме също така четвъртата и петата пресечни точки. Тези пресечни точки присъстват в списъците, изготвени от “Откривател”, като освен това “Откривател” може отделно да намери и идентифицира тези пресечни точки. С “Откривател” намираме и идентифицираме и центъра на изучаваната C-коника. След като сме построили макроса на C-кониката, можем лесно да го използваме във всеки чертеж.

С програма за динамична геометрия можем да построим и намерените 54 забележителни точки и по този начин визуално да проверим, че те лежат върху C-кониката. Намерените точки лесно се построяват, ако имаме макроси на основните точки и макроси на операциите. Например, точката “Product of the Kosnita Point and the Steiner Point” можем лесно да построим с използването на три макроса – макроси за построяването на точките “Kosnita Point” и “Steiner Point” и макрос за построяването на произведението на две дадени точки. С използването на тези макроси точката “Product of the Kosnita Point and the Steiner Point” може да бъде построена за няколко секунди. Графиките, включени в тази статия, са построени с програмата C.a.R. и с използване на макроси.

За изготвяне на макроси на C.a.R. използваме построения с линийка и пергел. Авторите ще разгледат в отделна статия темата за създаване на макроси на C.a.R. Ще отбележим, че програмата C.a.R. се придружава от подробно ръководство за потребителя, в което е описано създаването и използваенто на макроси.

4. Използване на програмата за компютърна алгебра Maple

Компютърната програма “Откривател” открива теореми. Всеки ред от списъците, които се съдържат в приложените към тази статия файлове, може да бъде презаписан като теорема. Доказателствата на теоремите, които използва

“Откривател”, са нестандартни. Поради тази причина е необходимо, когато искаме да представим доказателство на теорема, открита от “Откривател”, да го презапишем в традиционен формат. В интернет има анонси на компютърни програми, които доказват теореми от евклидовата геометрия, но авторите не намериха работеща програма от този вид.

Нека да докажем следната теорема:

Теорема 1. The Quotient of the Euler Reflection Point divided by the Exeter Point lies on the Circumconic with the Circumcenter as Perspector.

Горната теорема е теоремата, която съответства на ред 12 от List D. Точката, за която трябва да докажем, че лежи върху изучаваната *C*-коника, е точка R на фиг. 2.

Доказателството е както следва. Използваме барицентрични координати. Барицентричните координати на точките “Euler Reflection Point” и “Exeter Point” са известни. Можем да ги видим например в (Kimberling), където тези точки са дадени съответно с номера X(110) и X(22). Ще напомним дефиницията на частно на две точки. Нека са дадени две точки P и Q в равнината на триъгълника *ABC*. Намираме барицентричните координати на тези точки. Нека барицентричните координати са както следва. $P=(u_1,v_1,w_1)$ и $Q=(u_2,v_2,w_2)$. Тогава частното на точките P и Q е точката *P/Q* с барицентрични координати $\left(\frac{u_1}{u_2},\frac{v_1}{v_2},\frac{w_1}{w_2}\right)$. Изучаваната *C*-коника има уравнение $pyz+qzx+rxy=0$, където *p, q* и *r* са барицентричните координати на описаната около триъгълника *ABC* окръжност:

$$p=a^2(b^2+c^2-a^2)\,,\quad q=b^2(c^2+a^2-b^2)\,,\quad r=c^2(a^2+b^2-c^2)\,.$$

С a,b,c означаваме дължините на страните на триъгълника *ABC*, $a=BC$, $b=CA$ и $c=AB$. За да проверим, че точката *P/Q* лежи върху изучаваната *C*-коника, трябва да заместим в уравнението на *C*-кониката *x, y* и *z* съответно с барицентричните координати на точката *P/Q* и след опростяване трябва да получим тъждеството $0=0$.

При изготвяне на доказателствата е целесъобразно да използваме компютърна програма за компютърна алгебра като Maple, която ни избавя от необходимостта да извършваме с молив и лист алгебричните преобразувания. Използването на Maple ни спестява време и усилия и избягваме евентуални грешки, които хората са склонни да допускат. Освен това, в редица случаи алгебричните преобразувания са твърде обемисти, така че Maple съществено ни подпомага. Тази компютърна програма обаче не е безплатна. Учениците и студентите с повишен интерес към математиката трябва да имат възможност да ползват Maple.

Файлът на Maple с доказателството на теорема 1 е приложен към тази статия. Командите, които трябва да запишем, за да докажем теорема 1, са следните:

```
p:=a^2*(b^2+c^2-a^2);
q:=b^2*(c^2+a^2-b^2);
r:=c^2*(a^2+b^2-c^2);
E:=p*y*z+q*z*x+r*x*y;
uP:=a^2/(b^2-c^2);vP:=b^2/(c^2-a^2);wP:=c^2/(a^2-b^2);
uQ:=a^2*(b^4+c^4-a^4);vQ:=b^2*(c^4+a^4-b^4);wQ:=c^2*(a^4+b^4-c^4);
u:=uP/uQ;v:=vP/vQ;w:=wP/wQ;
E:=subs(x=u,y=v,z=w,E);
E:=simplify(E);
```

Ще поясним записаните команди. Първо записваме барицентричните координати на точка O, след това записваме лявата страна на уравнението на C-кониката, след това записваме барицентричните координати на точките P и Q, след което записваме координатите на частното на тези две точки. С командата на предпоследния ред извършваме заместването в лявата страна на уравнението на C-кониката, а с последната команда извършваме опростяване на получения израз. След като щракнем върху бутона на Maple, върху който са изобразени три удивителни знака (бутон за последователното изпълнение на всички записани команди), получаваме, че лявата страна на уравнението на C-кониката е равна на 0. Това доказва теоремата.

Изготвянето на доказателството с Maple се свежда до писането на поредица от команди, които компютърната програма трябва да изпълни. С използването на Maple ние имаме възможност бързо и лесно да съставяме доказателства, като се съсредоточим върху алгоритмите на доказателствата.

Теорема 2. The Product of the Kosnita Point and the Steiner Point lies on the Circumconic with the Circumcenter as Perspector.

Теорема 3. The Product of the Prasolov Point and the Steiner Point lies on the Circumconic with the Circumcenter as Perspector.Maple

Горните теореми са теоремите, които съответстват на редове 7 и 8 от List D. Точките, за които трябва да докажем, че лежат върху изучаваната C-коника, са съответно точки P и Q на фиг. 2.

Ще напомним дефиницията на произведение на две точки. Нека са дадени две точки P и Q в равнината на триъгълника ABC. Намираме барицентричните координати на тези точки. Нека барицентричните координати са както следва: $P=(u_1,v_1,w_1)$ и $Q=(u_2,v_2,w_2)$. Тогава произведението на точките P и Q е точката $P.Q$ с барицентрични координати (u_1u_2,v_1v_2,w_1w_2). Доказателствата на теореми 2 и 3 са аналогични на доказателството на теорема 1. Файлът на Maple с доказателството на теорема 2 е приложен към тази статия. Читателят може да използва този файл, като с малка промяна на файла да получи доказателството на теорема 3.

Забележителните точки на триъгълника, които са включени в List D, не са включени в (Kimberling). Следователно, тези нови забележителни точки могат да бъдат изучени и предложени за включване в (Kimberling) или в други енциклопедии. По-горе установихме, че тези точки лежат върху изучаваната C-коника. Други свойства на нови точки ще бъдат разгледани в темата за ролите на точки. Тук ще отбележим, че ако искаме да предложим една нова точка за включване в (Kimberling), трябва да представим и барицентричните координати на тази точка. Пресмятането на барицентричните координате на една забележителна точка става лесно с помощта на Maple. В хода на доказателството на теорема 1 ние намерихме барицентричните координати на точката "Quotient of the Euler Reflection Point divided by the Exeter Point". В доказателството тези барицентрични координати са означени с u,v,w. Първата барицентрична координата на тази точка е следната:

$$u = \frac{1}{(b^2-c^2)(b^4+c^4-a^4)}.$$

Нови точки, заедно с техни свойства и с барицентричните им координати могат да бъдат предложени за включване и в (Grozdev & Dekov, 2014c).

5. Компютърната програма "Откривател" в помощ на студенти и ученици

Компютърната програма "Откривател" е проектирана като учебно помагало за подпомагане на учебния процес в училища и университети. Компютърната програма може да бъде използвана за подготовка на реферати и дипломни работи, за кръжочна работа и т.н. Програмата може да бъде полезна на първо място на ученици с повишен интерес към математиката и студенти, които учат за учители по математика и информатика. Преподавателите по аналитична геометрия биха могли да разнообразят преподавания учебен материал с теореми от "Откривател".

Нека да търсим забележителни точки на триъгълника, които са върху дадена C-коника. Броят на C-кониките е равен на броя на забележителните точки на триъгълника, тъй като всяка забележителна точка определя една C-коника. Ние предполагаме, че обект на изследване в една тема ще бъдат двете асоциирани C-коники. Следователно, може да се счита, че броят на темите, които могат да бъдат разработени, е равен на броя на забележителните точки на триъгълника, делен на две.

Понастоящем има много на брой забележителни точки на триъгълника, които са от интерес за изследователите и които определят интересни C-коники. По-долу са дадени някои забележителни точки, като асоциираните точки на изброените по-долу точки са пресметнати и идентифицирани с "Откривател". Номерата на точките са съгласно (Kimberling):

X(5) Nine-Point Center. (Associated point: X(216)).
X(7) Gergonne Point. (Associated point: X(3160)).
X(8) Nagel Point (Associated point: X(3161)).
X(39) Brocard Midpoint. (Associated point: X(141) Symmedian Point of the Medial Triangle).
X(55) Internal Center of Similitude of the Incircle and the Circumcircle. (Associated point: X(5452)).
X(56) External Center of Similitude of the Incircle and the Circumcircle. (Associated point: X(478)).

В горния списък както изходните точки, така и техните асоциирани точки са включени в (Kimberling). В голямата част от случаите обаче, асоциираната точка на една точка, която е включена в (Kimberling) е точка, която не е включена в (Kimberling). В този случай "Откривател" може да ни помогне с информация за новата точка. Сред точките, включени в (Kimberling), асоциираните точки на които не са включени в (Kimberling), са например следните точки (Това е част от списък, изготвен от "Откривател"): Feuerbach Perspector, Outer Fermat Point, Inner Fermat Point, First Isodynamic Point, Second Isodynamic Point, Outer Napoleon Point, Inner Napoleon Point, Clawson Point, de Longchamps Point, Schiffler Point, Exeter Point, Far-Out Point, Inverse of the Incenter in the Circumcircle, Bevan Point, Center of the Sine-Triple-Angle Circle, Kosnita Point, Prasolov Point, Retrocenter, Moses Point, Tarry Point, Steiner Point, Euler Reflection Point, Parry Point, Congruent Isoscelizers Point, Yff Center of Conguence, Outer Soddy Point, Inner Soddy Point, Apollonius Point, Center of the Brocard Circle, Equal Parallelians Point, Center of the Apollonius Circle, First Brocard Point, Second Brocard Point, Third Brocard Point и много други.

По-долу ще отбележим плана, който би могъл да следва един студент или ученик при изготвяне на реферат (дипломна работа и т.н.).

1. Студентът избира забележителна точка на триъгълника.
2. "Откривател" пресмята центъра на C-кониката, имаща за перспектор избраната забележителна точка. "Откривател" пресмята също така четвъртата и петата пресечни точки на изучаваната C-коника и на нейната асоциирана C-коника. Студентът също може да пресметне тези точки. Ще отбележим, че центърът на изучаваната C-коника същевременно е перспектор на асоциираната C-коника.
3. "Откривател" открива списъци от забележителни точки, които лежат върху изучаваната C-коника и нейната асоциирана С-коника. Помощта на "Откривател" тук е съществена.
4. "Откривател" идентифицира намерените точки, като открива кои от намерените точки са включени в енциклопедията (Kimberling) и кои от намерените точки са нови. Помощта на "Откривател" тук е съществена.
5. Студентът изучава при какви параметри на триъгълника ABC точката лежи върху C-кониката. За целта студентът използва компютърните програми C.a.R. и Maple.
6. Студентът използва компютърната програма Maple, за да изготви за всяка една от намерените точки доказателство на твърдението (теоремата) че точката лежи върху изучаваната крива..
7. Студентът използва Maple, за да намери барицентричните координати на новите забележителни точки.
8. Студентът използва компютърната програма C.a.R. за да изготви макроси на изучаваните C-коники и на новите намерените точки. Студентът използва макросите за да начертае чертеж за визуална проверка на твърдението, че намерените точки лежат върху изучаваната C-коника. Студентът изготвя на графики. На една от графиките студентът начертава изучаваните C-коники и всички намерени точки, които лежат върху C-кониките. Студентът използва C.a.R. за да изготви анимация за всяка от намерените нови точки, като анимацията показва стъпка по стъпка как намерената точка се построява с линийка и пергел.

9. Студентът може да включи в изследването си и други задачи, отнасящи се до изучаваните *C*-коники, като използва по подходящ начин “Откривател”.
10. Студентът може да изследва *C*-кониките, като използва декартови координати и уравненията на *C*-кониките в декартови координати. Тук студентът също използва “Откривател”. Тази пункт е особено подходящ за студенти, които изучават аналитична геометрия.
11. Студентът изготвя реферата си. Рефератът включва като допълнителен материал файловете в HTML-формат, изготвени от “Откривател”, както и изготвените от студента файлове на Maple и на C.a.R., както и графиките.
12. Студентът би могъл да предложи новите забележителни точки, открити в изследването, за включване в (Kimberling), (Weisstein), (Grozdev & Dekov, 2014b) и т.н., като включи барицентричните координати на точките и свойства на точките, открити в процеса на изследването. Студентът трябва да предложи реферата си за включване в Компютърно-генерираната енциклопедия по евклидова геометрия (Grozdev & Dekov, 2014c). Ако изследването е на достатъчно добро ниво, студентът може да предложи изследването си за публикуване в научно списание, например Journal of Computer-Generated Mathematics, което понастоящем е единственото в света научно списание, посветено на математика, открита от компютрите. Редно е също така училищата и университетите да открият свои он-лайн списания, в които да бъдат публикувани рефератите и дипломните работи на възпитаниците на учебното заведение.

Ще отбележим, че студентът може също така да разработи темата за *C*-коника с перспектор центърът на описаната около *ABC* окръжност. Фрагменти от тази тема са дадени в настоящата статия, като читателят може да попълни това, което е пропуснато в тази статия.

Съгласно горния план, в процеса на изготвянето на реферата студентът усъвършенства уменията си за работа с компютърна програма за открития, като “Откривател”, компютърна програма за динамична геометрия като C.a.R. (или GeoGebra), и компютърна програма за компютърна алгебра като Maple. Тези знания и умения са важни, особено за студенти, които се подготвят за учители по математика и информатика.

Работата на студента по изготвянето на реферата може да бъде съществено улеснена, ако студентът използва колекция от макроси за Maple и за C.a.R. Изготвянето на такива колекции също е добра тема за реферат или дипломна работа.

Една колекция с макроси за Maple трябва да включва изготвянето на код за забележителни точки, триъгълници, окръжности и т.н. и колекция от код за операциите, които се използват в евклидовата геометрия, като например намирането на симетричната точка на точка относно права и т.н. При наличието на пълна колекция от макроси задачата на студента ще се сведе до това да изготви алгоритъма на доказателството, като след това трябва да използва само копиране и вмъкване, за да изготви самото доказателство. Това ще позволи на студента да се съсредоточи върху идеологията на доказателството.

Използването на макроси за C.a.R. позволява бързото изготвяне на различни чертежи. Ще отбележим, че в C.a.R. има вградена колекция от макроси, но тази вградена колекция е малка по обем и не е достатъчна.

Колекции от макроси на Maple и за C.a.R. би трябвало да съдържат стотици макроси за обекти и операции. Ще отбележим, че тези макроси по същество дублират функциите на PHP, които използва “Откривател” за описание на обектите и операциите в евклидовата геометрия. Една друга интересна задача е изготвянето на функции на езика програмиране PHP за “Откривател”.

Ще отбележим, че освен *C*-кониките, има и редица други интересни видове криви от втора степен, които чакат да бъдат изследвани.

6. Компютърно-генерираната енциклопедия по евклидова геометрия

Компютърно-генерираната енциклопедия по евклидова геометрия, която понастоящем е процес на разработване от авторите на тази статия, е полезно допълнение към компютърната програма “Откривател”.

Компютърно-генерираната енциклопедия съдържа раздел с дефинициите на понятията, използвани от “Откривател”. Този раздел е съществен, тъй като се налага “Откривател” да използва нови дефиниции и да унифицира съществуващите. Като пример ще посочим дефиницията на частно на две точки, използвана в тази статия. В литературата няма общоприет термин за тази операция. Един от термините е “Reciprocal Conjugation of P and Q”, използван например в (Dean & van Lamoen, 2001). Цитираната статия е особено полезна, тъй като в нея се дава алгоритъм за построяване на частното с линийка и пергел. Що се касае до произведението на две точки, алгоритъм за построяване на произведението с линийка и пергел е даден в (Yiu, 2000).

В литературата има различни описания на построения с линийка и пергел, които обаче са разпръснати на различни места. Компютърно-генерираната енциклопедия е полезна и с това, че в раздела “Геометрични построения” са събрани на едно място и са подредени геометричните построения, които се използват от “Откривател”.

За другите раздели на Компютърно-генерираната енциклопедия по евклидова геометрия читателят може да прочете в статията (Гроздев & Деков, 2014b).

Допълнителен материал

Към статията е приложен файлът 2014-3.zip, който съдържа файловете, които са цитирани в тази статия.

Литература

1. Гроздев, С. & Ненков, В. (2012a). Три забележителни точки върху медианите на триъгълника, София: Архимед.

2. Гроздев, С. & Ненков, В. (2012b). Около ортоцентъра в равнината и пространството, София: Архимед.

3. Гроздев, С. & Деков, Д. (2013a). По пътя към първата компютърно-генерирана енциклопедия, *Математика и информатика*, № 1, 49-59.

4. Гроздев, С. & Деков, Д. (2013b). Някои приложения на компютърната програма “Откривател”, *Математика и информатика*, № 5, 444-455.

5. Grozdev, S.. & Dekov, D. (2014a). Learning by Discoveries, Journal of Computer-Generated Mathematics, vol. 9, no 1.

6. Гроздев, С. & Деков, Д. (2014b). Компютърната програма “Откривател” и компютърно-генерираната енциклопедия по евклидова геометрия, Journal of Computer-Generated Mathematics, vol. 9, no 2.

7. Гроздев, С. & Деков, Д. (2014c). Computer-Generated Encyclopedia of Euclidean Geometry, в подготовка.

8. Dean, K. & van Lamoen, F. (2001) Geometric Construction of Reciprocal Conjugations, *Forum Geometricorum*, vol. 1, 115–120.

9. Kimberling C., Kimberling’s Encyclopedia of Triangle Centers, http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html

10. Weisstein E., MathWorld - A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/

11. P. Yiu, The uses of homogeneous barycentric coordinates in plane euclidean geometry, Int. J. Math. Edu. Sci. Technol., 31 (2000), 569-578.

12. P. Yiu, Introduction to the Geometry of the Triangle, Florida Atlantic University lecture notes, 2001, available at http://math.fau.edu/yiu/GeometryNotes020402.pdf.

Sava Grozdev, Sofia, Bulgaria, sava.grozdev@gmail.com

Deko Dekov, Stara Zagora, Bulgaria, ddekov@ddekov.eu